



TITLE:

一様等方乱流中のラグランジュ粒子の接触特性評価 (乱流の普遍性と個別性:流体乱流を通して宇宙を見る)

AUTHOR(S):

横嶋, 哲; 益子, 岳史; 松坂, 隆弘; 宮原, 高志

CITATION:

横嶋, 哲 ...[et al]. 一様等方乱流中のラグランジュ粒子の接触特性評価 (乱流の普遍性と個別性:流体乱流を通して宇宙を見る). 数理解析研究所講究録 2013, 1822: 76-83

ISSUE DATE:

2013-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/194696>

RIGHT:

一様等方乱流中のラグランジュ粒子の接触特性評価

横嶋 哲*・益子 岳史†・松坂 隆弘‡・宮原 高志*

1 はじめに

本報では統計的に定常な一様等方乱流中を漂う多数の微小なラグランジュ粒子（トレーサ粒子）の衝突特性を、直接数値シミュレーション（DNS）結果に基づいて検討する。乱流中の微小粒子の振る舞いや相互衝突、それに伴う凝集といった現象は自然界にも工業装置内にも遍在し、その現象解明を目指して長年に渡って多くの研究が行われてきた。

最も重要な先行研究のひとつに Saffman & Turner (1956)^[1]がある。彼ら是对流雲の成長初期に見られる、微小水滴の衝突合体成長過程の解明を目指して、理論的考察を行った。Saffman-Turner 理論（以下、ST 理論と呼称）の精度検証例として、Wang *et al.* (1998)^[2]が挙げられる。本研究の一部は ST 理論の精度検証と位置づけられ、すなわち Wang *et al.* (1998) の追試験・拡張と捉えられる。本研究の Wang *et al.* (1998) に対する特色は以下の点にある：

- Wang *et al.* (1998) でシミュレートされた粒子挙動の大半は“frozen turbulence”（一様等方乱流のある瞬間のスナップショットで、渦は成長も消滅もしない）を背景流速としている。一方、本研究では生きた乱流場である“evolving turbulence”（ナヴィエ・ストークス方程式の時間発展から得られる流れ場で、時空間上で発達・減衰する多数の渦から成る）を背景流速として粒子の衝突特性を考察する。
- Wang *et al.* (1998) はあるレイノルズ数、ある衝突半径の条件下で衝突後の粒子の処理方法を 3 パターン変化させて、衝突率に与える影響を考察した。一方、本研究では衝突後の粒子の処理については最も単純なものを採用し、レイノルズ数および衝突半径を共に系統的に変化させ、粒子の衝突特性を評価する。

- 本研究では DNS を Wang *et al.* (1998) に比べてより高い時空間解像度の下で実行し、より多くの微小粒子の挙動をより長時間に渡って観察した結果に基づいて衝突特性を評価する。

また、本研究では微小粒子の衝突頻度に加え、2 粒子が衝突してから離れるまでの接触継続時間にも注目する。これは、本研究で扱う系は水中での微生物同士の被食-捕食関係を考える上での基本モデルとも捉えられ、そこでは接触頻度だけでなく接触継続時間もまた重要なパラメータである（接触継続時間が短すぎると捕食できない）^[3]ことが背景にある。

本報の構成は以下のとおりである：2 節では ST 理論について詳述し、本研究で行う ST 理論の精度検証の方法を示す。3 節では支配方程式とその離散手法、シミュレーションの条件設定等、本研究で行う DNS について述べる。4 節では DNS 結果に基づいて微小粒子の衝突特性を議論する。5 節では本研究で得られた重要な知見をまとめ、結論とする。

2 Saffman-Turner 理論

Saffman & Turner (1956) は乱流中の多数の微小粒子の相互衝突の頻度を以下のように評価した。半径 r の同一径粒子が数密度 n_p で存在する乱流場において、

- 粒子の慣性は無視できる（仮定 1a）
- 粒子は流れに影響しない（仮定 1b）
- 粒子密度は一様かつ定常（仮定 1c）

の仮定の下で、衝突率（単位時間に単位体積内で生じる衝突数） N_C を、運動学的議論により次式で見積もった：

$$N_C = 2\pi R^2 |w_r| \frac{n_p^2}{2} \quad (1)$$

*静岡大学 工学部 システム工学科

†静岡大学 工学部 機械工学科

‡静岡大学 大学院工学研究科 システム工学専攻

ここで R は衝突半径 ($R = 2r$) , w_r は中心距離が R 離れた 2 粒子 (すなわち衝突あるいは離別する 2 粒子) の相対速度を, 粒子中心同士を結ぶ直線上に射影したものであり, 以下では便宜的に衝突/離別時相対速度と呼ぶ。

Saffman & Turner は, さらに以下のような仮定

- $|w_r| \cong R|\partial u/\partial x|$ (仮定 2a)
- $(\partial u/\partial x)^2 \cong \varepsilon/15\nu$ (仮定 2b)^[4]
- 速度勾配 $\partial u/\partial x$ はガウス分布に従う (仮定 2c)

を追加し, 式 (1) を簡素化した:

$$N_C = \left(\frac{8\pi\varepsilon}{15\nu} \right) R^3 \frac{n_p^2}{2} \quad (2)$$

ここで仮定 2b は乱れが一様等方であれば真となる。式 (2) に含まれる流れに関するパラメータは流体の動粘性係数 ν および乱流エネルギーの散逸率 ε のみであり, これは, この理論式 (2) によれば, 微小粒子の衝突過程はコルモゴロフスケールで支配されることを意味する。

本報では式 (1) および (2) を, それぞれ Saffman-Turner 理論の第 1 表現, 第 2 表現と呼称する。また, Wang *et al.* (1998) に倣い, $\Gamma \equiv N_C/(n_p^2/2)$ を衝突因子と呼ぶ。すなわち, $\Gamma_{ST1} \equiv 2\pi R^2|w_r|$, $\Gamma_{ST2} \equiv \left(\frac{8\pi\varepsilon}{15\nu}\right)R^3$ はそれぞれ, ST 理論の第 1 表現, 第 2 表現に基づく衝突因子である。本研究ではこれら ST 理論に基づく衝突因子の見積りの妥当性を評価するため, 乱流中の多数の微粒子の衝突現象を DNS により再現し, $N_C/(n_p^2/2)$ の直接評価によって衝突因子 Γ を算出する (そのようにして得られた衝突因子を Γ_{DNS} と記す)。次節では DNS の詳細について記す。

3 数値シミュレーションの詳細

3.1 支配方程式とその離散化手法

非圧縮で物性 (流体密度 ρ および動粘性係数 ν) が一様かつ一定な流体を検討対象とする。ナヴィエ・ストークス方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

を, 周期境界条件が課された立方体領域内で数値的に解くことによって, 一様かつ等方な乱流場 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$

を得た。ここで $\boldsymbol{\omega} \equiv \nabla \times \mathbf{u}$ は渦度ベクトル, P は静圧と動圧の和 (を流体密度で除したもの), すなわち $P \equiv p/\rho + |\mathbf{u}|^2/2$ である。外力 \mathbf{f} を Yamazaki *et al.* (2002)^[5] に倣って低波数領域で与えることで, 系の運動エネルギーの総量を一定に保ち, 統計的に定常な流れを得た。空間微分項はフーリエ・スペクトル法を用いて評価し, 時間積分は粘性拡散項は厳密に, 非線形項は 2 次精度ルンゲ・クッタ法により近似した。エイリアス誤差は 3/2 法を用いて除去した。ナヴィエ・ストークス方程式の解法の詳細を付録 A に記す。また, 減衰性の一様等方乱流場を対象としたコード性能の検証結果を付録 B で示す。

トレーサ粒子は粒子位置での流体速度に従って時々刻々と移動する。すなわち粒子位置 $\mathbf{x}_p(t)$ は

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_p, t) \quad (5)$$

に従う。式 (5) の右辺に含まれる, 粒子位置での流体速度は tricubic 法^[6]を用いて評価し, 時間積分は 2 次精度ルンゲ・クッタ法により近似した。また, 流速の補間に trilinear 法を用いた場合の結果とその影響について付録 C で示す。

3.2 粒子の接触, 衝突, 離別と接触継続時間

ある時刻 t における粒子 i と粒子 j の中心距離を $d_{ij}(t)$ と記述すれば, 時刻 t に粒子 i と粒子 j が「接触」状態にあるとは, $d_{ij}(t) \leq R$ であることを表す。時刻 t_1 に粒子 i と粒子 j が「衝突」したとは, $d_{ij}(t_1 - \Delta t) > R$ かつ $d_{ij}(t_1) \leq R$ が成り立つことを意味する。ここで Δt は時間の離散刻み幅である。また, 時刻 t_2 に粒子 i と粒子 j が「離別」したとは, $d_{ij}(t_2 - \Delta t) \leq R$ かつ $d_{ij}(t_2) > R$ が成り立つことを意味する。時刻 t_1 に衝突した 2 粒子が接触状態を保ち, 時刻 t_2 によりやく離別したとすれば, その 2 粒子の「接触継続時間」 T_C は $t_2 - t_1$ である。

Wang *et al.* (1998) は粒子の衝突形態を 3 パターン (タイプ I, II, III 衝突) に分けて取り扱ったが, 上記で定義された衝突はそのうちのタイプ I 衝突に一致する。タイプ II および III 衝突は Δt が十分に小さくない場合にのみ生じ得るもので, 本研究ではそれらの頻度が無視できるような時間刻み幅を採用した (3.4 節参照)。本研究で観察された衝突のほとんどは 2 粒子によるものであるが, 3 粒子

表-1 直接数値シミュレーションによって得られた代表的な計算パラメータと乱流統計量.

Case	Re_λ	N	$\Delta x/\eta$	$k_{\max}\eta$	$\Delta t/\tau_\eta$	T/τ_η	L_e/η	T_e/τ_η	u'/u_η
R21	20.5	48^3	1.05	2.99	0.052	413	12.2	5.30	2.30
R25	25.0	64^3	0.99	3.16	0.051	410	16.4	6.47	2.54
R31	31.0	96^3	0.84	3.73	0.042	415	22.6	8.00	2.83
R36	36.1	128^3	0.78	4.04	0.031	427	28.5	9.32	3.05
R48	48.2	192^3	0.69	4.53	0.023	404	43.9	12.45	3.53
R53	53.2	256^3	0.61	5.13	0.016	405	50.9	13.73	3.71

$Re_\lambda \equiv u'\lambda/\nu$: テイラーレイノルズ数; $\lambda = (10\nu\langle\bar{K}\rangle/\langle\bar{\epsilon}\rangle)$: テイラー長; ν : 流体の動粘性係数

$\langle\bar{K}\rangle$: 乱流エネルギーの時空間平均値; $\langle\bar{\epsilon}\rangle$: 乱流エネルギー散逸率の時空間平均値

$u' \equiv (2\langle\bar{K}\rangle/3)^{1/2}$, $L_e \equiv u'^3/\langle\bar{\epsilon}\rangle$, $T_e \equiv u'^2/\langle\bar{\epsilon}\rangle$: それぞれ大規模渦の特性速度, 長さ, 時間

$u_\eta \equiv (\langle\bar{\epsilon}\rangle\nu)^{1/4}$, $\eta \equiv (\nu^3/\langle\bar{\epsilon}\rangle)^{1/4}$, $\tau_\eta \equiv (\nu/\langle\bar{\epsilon}\rangle)^{1/2}$: それぞれコルモゴロフ特性速度, 長さ, 時間

N : 全フーリエモード数; Δx : 格子間隔; k_{\max} : 最大波数; Δt : 時間刻み幅

T : 総シミュレーション継続時間

以上の同時衝突も認められた. その場合, n 個の粒子による同時衝突は $n(n-1)/2$ 組の 2 粒子衝突として扱った.

衝突後の粒子の取り扱いに関して, Wang *et al.* (1998) は 3 種類のスキームを適用した. 本研究での扱いはそのうちのスキーム 1 に一致し, すなわち粒子同士は重なって存在可能で, また衝突後の粒子は特別な操作を受けることなく系に留まることができる.

3.3 乱流場の計算ケースの詳細

レイノルズ数を系統的に変化させた 6 種類の一様等方乱流場を DNS により再現した. それぞれのケースの代表的な計算パラメータと乱流統計量を表-1 に示す. 表中で使用した, $\langle\cdot\rangle$ および $\bar{\cdot}$ はそれぞれ系の計算領域全体での体積平均, 時間平均オペレータを意味する. 総シミュレーション時間は全てのケースでコルモゴロフ時間の 400 倍超とした. これは, 4.3 節で示されるような, 長時間に及ぶ 2 粒子の接触継続事象をも再現性をもって捉える上で十分なシミュレーション継続時間である.

3.4 粒子場の条件設定

本研究では衝突半径 R がコルモゴロフ長 η に等しい場合を基本設定とした. $Re_\lambda = 36.1$ および 53.2 の条件下では, 衝突半径 R の衝突率に対する影響を評価するために $R/\eta = 2$ および 3 の場合に

表-2 粒子場の代表的な計算パラメータと衝突特性.

Case	R/η	N_p	PVF	N_C
R21	1	7000	2.9%	99127
R25	1	10000	2.0%	99711
R31	1	14500	1.4%	103267
R36	1	19500	1.0%	101271
	2	6900	2.9%	101296
	3	3700	5.3%	97361
R48	1	30000	0.7%	94252
R53	1	38500	0.5%	95289
	2	13500	1.5%	93574
	3	7500	2.8%	96883

N_p : 粒子数; N_C : 衝突数; PVF: 粒子体積率

についても検討した. 流れに投入する粒子数は, 全てのケースで総シミュレーション時間 T 中に観察される粒子衝突数が同程度 (約 10 万回) となるように調整した. 各ケースでの粒子数, 衝突数等を表-2 にまとめた. 粒子の初期配置は一様乱数を用いて決定し, 統計的に定常な状態に達したと判断された乱流場に粒子を投入し, それぞれの粒子の軌跡を追った.

粒子の初期配置の影響を評価するために, 粒子投入時の接触がゼロとなるように作為的に初期配置した場合のシミュレーションも行った. 十分な時間が経過後の衝突特性はこれらの初期配置の違いによらないことが確認された. また, R21 のケースに関して, 時間刻み幅のみを 1/5 倍に変更した

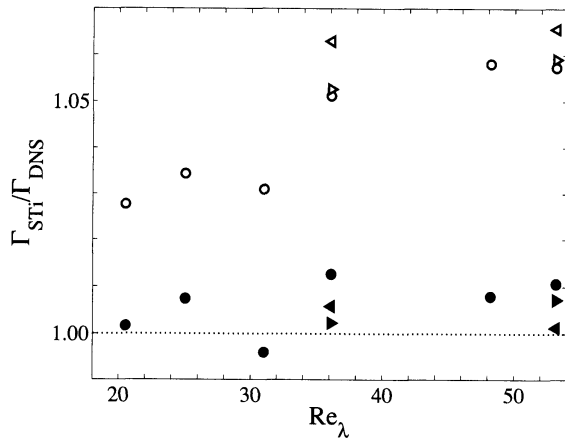


図-1 Saffman-Turner 理論の検証—衝突因子 Γ の評価. 黒塗りプロット: $\Gamma_{ST1}/\Gamma_{DNS}$; 白抜きプロット: $\Gamma_{ST2}/\Gamma_{DNS}$. ○, ●: $R/\eta = 1$; ▷, ▶: $R/\eta = 2$; ◁, ◀: $R/\eta = 3$.

シミュレーションを行い、得られた衝突特性に有意な差は見当たらないことも確認した. すなわち、本数値実験で用いた時間刻み幅（コルモゴロフ時間の $1/20$ - $1/40$ 倍程度）は全ての衝突事象を捉える上で十分に小さく、Wang *et al.* (1998) が想定したようなタイプ II および III 衝突は本研究では無視できることを確かめた.

4 計算結果と考察

4.1 衝突率

図-1 に、ST 理論の第 1 表現、第 2 表現に基づく衝突因子の推測値 Γ_{ST1} , Γ_{ST2} を、DNS による直接評価 Γ_{DNS} で規格化したものを示す. なお、 Γ_{ST2} の評価に必要な $|w_r|$ は 4.2 節で述べるような方法で DNS から得た. Γ_{ST1} は誤差 1 パーセント程度で DNS 結果を予測できるのに対して、 Γ_{ST2} ではレイノルズ数の増加とともに DNS 結果からの乖離がより大きくなる傾向が認められる. これは第 2 表現の導出の際に Saffman & Turner は「速度勾配はガウス分布に従う」（仮定 2c）ことを仮定したが、実際にはレイノルズ数の増加とともに乱流の間欠性が強まり、この仮定が妥当性を欠くことが主要因と考えている.

次に ST 理論の衝突半径に対する依存性を検討する. $Re_\lambda = 36.1, 53.2$ のいずれでも、衝突半径 R の増加とともに Γ_{ST2} の Γ_{DNS} からのズレが増大

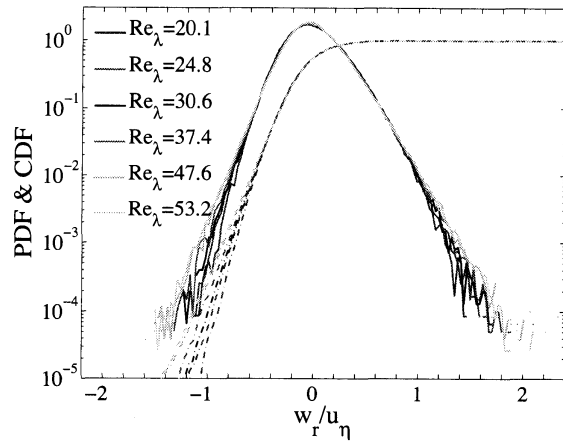


図-2 衝突/離別時相対速度 w_r の確率密度関数（実線）と累積分布関数（点鎖線）のレイノルズ数依存性 ($R/\eta = 1$).

する傾向が見受けられる. これは接触半径が大きくなるにつれてテイラー展開に基づく仮定 2a の近似精度が悪化するためと解釈される. また Γ_{ST1} の予測精度は衝突半径 R が大きくなるにつれて改善される傾向が認められる. これは、衝突半径の増加とともに粒子の解像度が高まるためと推測される. すなわち、今回の DNS で採用された解像度は背景流速となる一様等方乱流場の時空間発展を正確に捉える上では十分であっても、コルモゴロフ長オーダーの粒子の衝突過程の厳密な議論に供するにはより高い解像度を要する可能性があることを示唆する.

4.2 衝突/離別時相対速度

本節では ST 理論の第 1 表現に含まれる衝突/離別時相対速度 w_r の統計的性質を考察する. w_r の評価方法は、Wang *et al.* (2000)^[7] に倣い、中心が $R \pm 0.01R$ 離れた全ての 2 粒子ペアを抽出し、その相対速度に基づいた.

図-2 に、 w_r の確率密度関数と累積分布関数の分布を、表-3 に w_r の 4 次までのモーメントの値をそれぞれ示す. ここでは $R/\eta = 1$ の場合のみを考察対象とする.

表-3 より明らかなように、3 次モーメントまでの値はコルモゴロフ速度 u_τ で規格化された場合に、レイノルズ数に依存せずば一定の値をとる. 他方で 4 次モーメント（尖度）はレイノルズ数とともに増加する. 図-2 において確率密度関数の裾が

表-3 衝突/離別時相対速度の半径方向成分 w_r の各種モーメントのレイノルズ数依存性 ($R/\eta = 1$) .

Case	$\overline{ w_r }/u_\eta$	$\overline{w_r^2}/u_\eta^2$	$\overline{w_r^3}/\overline{w_r^2}^{3/2}$	$\overline{w_r^4}/\overline{w_r^2}^2$
R21	0.201	0.066	0.484	3.69
R25	0.201	0.067	0.489	3.86
R31	0.199	0.066	0.496	3.98
R36	0.198	0.066	0.493	4.11
R48	0.196	0.066	0.507	4.43
R53	0.197	0.067	0.499	4.45

レイノルズ数とともに広がる様子はこのことと整合する。

3 次モーメント (歪度) は正の値をとる。これは、2 粒子が近づく場合の相対速度は離れる場合よりも小さな値を取りやすいものの、時折大きな値をとることを意味するが、この現象の物理的な理由は今のところわかっていない。

4.3 接触継続時間

全てのケースで観察された約 10 万回の 2 粒子衝突に関して、それぞれの衝突後の接触継続時間 T_C の平均値と最大値を表-4 にまとめた。 T_C の平均値はレイノルズ数によらず $3.3\tau_\eta$ 程度となり、コルモゴロフ時間で整理できる。最大値にはばらつきが認められるものの、コルモゴロフ時間の 50 倍から 100 倍程度の値を取り、同じくコルモゴロフ時間で整理できるように見受けられる。また、 T_C は衝突半径には依存しないと言える。

T_C の確率密度関数および累積分布関数を図-3 に示す。コルモゴロフ時間 τ_η で規格化することでこれらの関数はレイノルズ数を問わず良好に一致する。接触継続時間は最大でコルモゴロフ時間の 100 倍近くにも及び、それは大規模渦の旋回時間の数倍にあたるが、その発生頻度は低い。そのような現象が最小スケールの渦を特徴づけるコルモゴロフ時間で整理できることはとても興味深く、渦構造との関連性の解明が期待される。

5 おわりに

統計的に定常な一様等方乱流中を漂う多数の微小ラグランジュ粒子の衝突特性を、直接数値シミュ

表-4 接触継続時間 T_C の統計的性質。

Case	R/η	Average		Maximum	
R21	1	$3.28\tau_\eta$	$0.62T_e$	$67\tau_\eta$	$12.6T_e$
R25	1	$3.31\tau_\eta$	$0.51T_e$	$65\tau_\eta$	$10.0T_e$
R31	1	$3.31\tau_\eta$	$0.41T_e$	$67\tau_\eta$	$8.4T_e$
R36	1	$3.32\tau_\eta$	$0.36T_e$	$100\tau_\eta$	$10.7T_e$
	2	$3.33\tau_\eta$	$0.36T_e$	$81\tau_\eta$	$8.7T_e$
	3	$3.39\tau_\eta$	$0.36T_e$	$58\tau_\eta$	$6.3T_e$
R48	1	$3.35\tau_\eta$	$0.27T_e$	$82\tau_\eta$	$6.6T_e$
R53	1	$3.37\tau_\eta$	$0.25T_e$	$82\tau_\eta$	$6.0T_e$
	2	$3.38\tau_\eta$	$0.25T_e$	$95\tau_\eta$	$6.9T_e$
	3	$3.41\tau_\eta$	$0.25T_e$	$97\tau_\eta$	$7.1T_e$

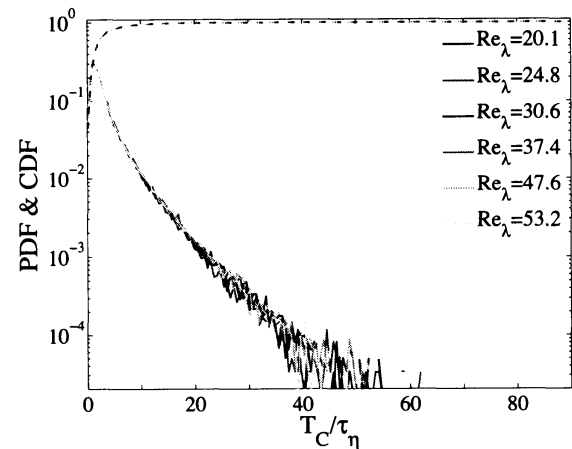


図-3 接触継続時間 T_C の確率密度関数 (実線) と累積分布関数 (1 点鎖線) のレイノルズ数依存性 ($R/\eta = 1$) .

レーション結果に基づいて検討した。得られた主要な知見は以下のようである：

- Saffman-Turner 理論^[1] の第 1 表現は、本研究で扱った系の粒子衝突率 (Wang *et al.* (1998) におけるスキーム 1) を “exact” に予測できると言える。これは Wang *et al.* (1998) の結論と一致する。
- ST 理論の第 2 表現の予測精度はレイノルズ数および衝突半径の増加とともに悪化する。これは第 2 表現導出の際の仮定の一部の妥当性が損なわれるためである。
- ST 理論の第 1 表現において重要な要素である衝突/離別時相対速度 (衝突あるいは離別する 2 粒子の相対速度を粒子中心同士を結ぶ直線

上に射影したもの) w_r の統計的性質は概ねコルモゴロフ速度で整理できるが、その確率密度関数の裾はレイノルズ数の増加とともに広がる。またその確率分布は正負非対称で、正(2粒子が相対的に接近する場合)の裾が長い。

- 2粒子の接触継続時間は平均でコルモゴロフ特性時間の3.3倍程度であるが、長い場合には、その発生頻度は低いものの、コルモゴロフ時間の50-100倍にも及ぶ。

実用的な乱流場の多くでは乱れは一様でも等方でもないものの、レイノルズ数は概して高く、局所的な一様等方性は期待できる。本研究結果は、ここで検討対象とした衝突過程は概ね小スケールの乱流変動で支配されていることを示しており、すなわち、本研究で得られた知見は多くの実用的流れにも当てはまると言える。

謝辞

本研究の一部は科学研究費補助金(課題番号23760456)の援助の下で行われた。

A ナヴィエ・ストークス方程式の解法の詳細

式(3)・(4)を波数空間表示すると

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \hat{N}_i = -ik_i \hat{P} - \nu k^2 \hat{u}_i + \hat{f}_i, \quad (6)$$

$$ik \cdot \hat{u} = 0. \quad (7)$$

ここで \hat{f} は物理量 f の離散フーリエ係数を表し、 $N \equiv \omega \times u$ である。式(6)の発散をとって、式(7)を考慮すれば

$$\hat{P} = i \frac{k_i}{k^2} \cdot (\hat{N}_i - \hat{f}_i)$$

を得る。式(6)から \hat{P} を消去すれば

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + P_{ij} (\hat{N}_j - \hat{f}_j) = -\nu k^2 \hat{u}_i$$

となる。ここで

$$P_{ij} \equiv \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$$

はソレノイダル空間への射影オペレータである。両辺に $e^{\nu k^2 t}$ を乗じれば

$$\frac{\partial}{\partial t} (e^{\nu k^2 t} \hat{u}_i) = e^{\nu k^2 t} P_{ij} (\hat{f}_j - \hat{N}_j) \quad (8)$$

のように、粘性項を左辺第1項に取り込んで表現できる。時間積分を2次精度ルンゲ・クッタ法(ホイン法)で近似すれば、時刻 $t = t^n$ での系の状態が既知のとき、微小時間 Δt だけ未来の $t = t^{n+1} = t^n + \Delta t$ の系の状態は、以下のように2段階の時間進行で求められる：

$$\hat{u}_i^* = e^{-\nu k^2 \Delta t} \left\{ \hat{u}_i^n + \Delta t \cdot P_{ij} (\hat{f}_j^n - \hat{N}_j^n) \right\}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_i^{n+1} = & e^{-\nu k^2 \Delta t} \left\{ \hat{u}_i^n + \frac{\Delta t}{2} P_{ij} (\hat{f}_j^n - \hat{N}_j^n) \right\} \\ & + \frac{\Delta t}{2} P_{ij} (\hat{f}_j^* - \hat{N}_j^*). \end{aligned} \quad (10)$$

ここで上付きの添え字は各物理量が定義される時刻を表し、添え字*はホイン法における予測値を意味する。

実際には、(i) 負粘性によるエネルギー注入をルンゲクッタ法の各サブステップの最後に行い、かつ(ii) Wang & Rosa (2009)^[8] に倣い、 P_{ij} による射影を非線形項 N だけでなく、前の時刻での速度 u^n にも施した。(i) に関しては、外力は $\hat{f}(k, t) = \alpha(k, t) \hat{u}(k, t)$ の形をとり、系の運動エネルギーを一定に保つように α の値を調整するので(ただし $k = 0$ または $k > 2.5$ の場合に $\alpha = 0$ で、それ以外の波数ベクトルに対しては α は一定)、式(11)および(13)で求まる速度場の質量保存式(12)および(14)が損なうことはない。よって、式(9)および(10)を以下のように修正した：

$$\hat{u}_i^{[*]} = P_{ij} \left[e^{-\nu k^2 \Delta t} (\hat{u}_j^n - \Delta t \cdot \hat{N}_j^n) \right], \quad (11)$$

$$\hat{u}_i^* = (1 + \Delta t \cdot \alpha^*) \hat{u}_i^{[*]}, \quad (12)$$

$$\hat{u}_i^{[n+1]} = P_{ij} \left[e^{-\nu k^2 \Delta t} \left(\hat{u}_j^n - \frac{\Delta t}{2} \hat{N}_j^n \right) - \frac{\Delta t}{2} \hat{N}_j^* \right], \quad (13)$$

$$\hat{u}_i^{n+1} = (1 + \Delta t \cdot \alpha^{n+1}) \hat{u}_i^{[n+1]}. \quad (14)$$

B 減衰性の一様等方乱流におけるコード性能の評価

本研究で用いた一様等方乱流ソルバーの妥当性評価として、減衰性の一様等方性乱流に適用した結果を図-4および5に示す。

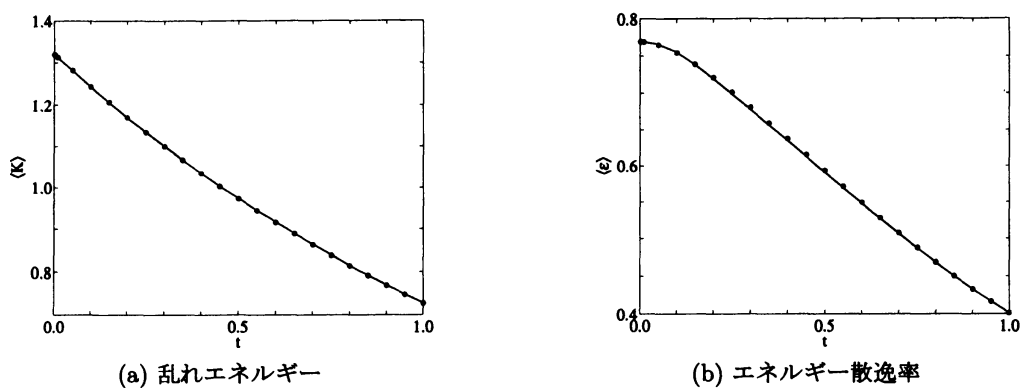


図-4 減衰一様等方乱流における乱れエネルギーとその散逸率の時系列分布. 実線: 本研究; プロット: 参照 DNS 結果 [9].

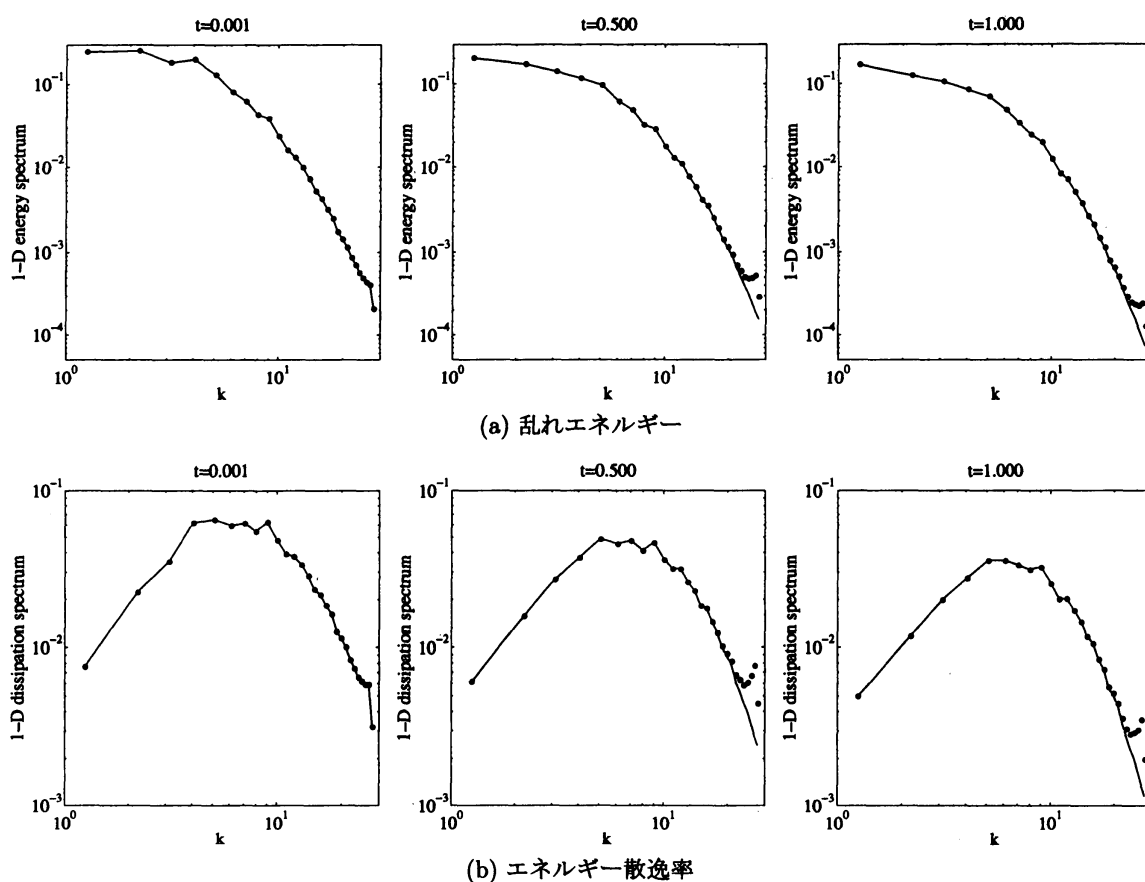


図-5 減衰一様等方乱流における乱れエネルギーとその散逸率の1次元パワースペクトル. 実線: 本研究; プロット: 参照 DNS 結果 [9].

C 補間法の影響 : tricubic vs. trilinear

本研究では流速等の計算格子点位置で求まる量を任意の粒子位置に補間する際に tricubic 法^[6]を用いた. ここでは R21 および R31 のケースを対象

として, trilinear 法を用いた場合に衝突特性に及ぶ影響を示す.

図-6 に衝突因子 Γ_{DNS} および Γ_{ST1} の分布を示す. Γ_{DNS} , Γ_{ST1} のいずれも trilinear 補間を用いた場合に tricubic 補間よりも値が小さい. 特に, DNS で観察された衝突回数から陽に求まる Γ_{DNS} に対し

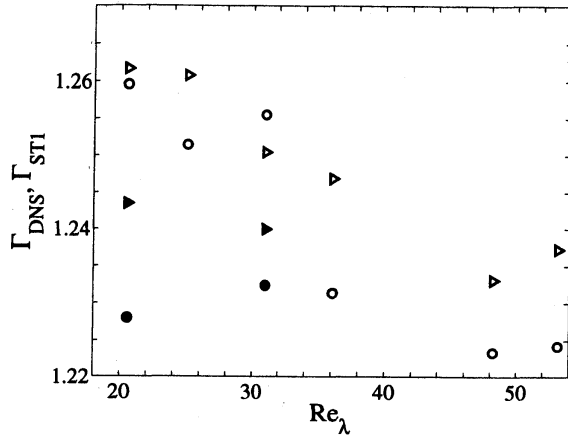


図-6 補間法の違いが衝突因子 Γ の評価に及ぼす影響. 黒塗りプロット ($Re_\lambda = 20.5$ および 31.0 のみ): trilinear 補間; 白抜きプロット: trilinear 補間 [6]. ○, ●: Γ_{DNS} ; ▷, ►: Γ_{STI} .

表-5 衝突/離別時相対速度の半径方向成分 w_r の各種モーメント補間法の影響 ($R/\eta = 1$).

Case	$ w_r /u_\eta$	$\overline{w_r^2}/u_\eta^2$	$\overline{w_r^3}/\overline{w_r^2}^{3/2}$	$\overline{w_r^4}/\overline{w_r^2}^2$
R21	0.201	0.066	0.484	3.69
R21L	0.198	0.064	0.486	3.68
R31	0.199	0.066	0.496	3.98
R31L	0.197	0.065	0.488	3.93

て補間法の影響が大きく, $Re_\lambda = 20.5$ では 2.5%, $Re_\lambda = 31.0$ では 1.8% の値の低下が認められる. レイノルズ数が増加すると補間法の影響が小さくなるのは, 本研究で行った DNS はレイノルズ数の増加とともに空間解像度が向上しており, 相対的に補間法の重要性が薄れるためと解釈できる.

表-5, 表-6 はそれぞれ表-3, 表-4 に対応するもので, R21L および R31L は R21, R31 に対して trilinear 補間を適用したケースを意味する. 先天的にばらつきの大きい最大接触継続時間を除けば, いずれも補間法の違いによって数パーセント程度のズレが認められる.

参考文献

- [1] Saffman, P.G. & Turner, J.S. 1956 On the collision of drops in turbulent clouds. *J. Fluid Mech.* **1**, 16–30; also Corrigendum 1988 **196**, 599.

表-6 接触継続時間 T_C の統計的性質-補間法の影響.

Case	R/η	Average		Maximum	
R21	1	$3.28\tau_\eta$	$0.62T_e$	$67\tau_\eta$	$12.6T_e$
R21L	1	$3.33\tau_\eta$	$0.63T_e$	$83\tau_\eta$	$15.6T_e$
R31	1	$3.31\tau_\eta$	$0.41T_e$	$67\tau_\eta$	$8.4T_e$
R31L	1	$3.32\tau_\eta$	$0.42T_e$	$75\tau_\eta$	$9.4T_e$

- [2] Wang, L.-P., Wexler, A.S. & Zhou, Y. 1998 On the collision rate of small particles in isotropic turbulence. I. Zero-inertia case. *Phys. Fluids* **10**, 266–276.
- [3] Mariani, P., Botte, V. & Ribera d'Alcalà, M. 2005 An object-oriented model for the prediction of turbulence effects on plankton. *Deep-Sea Research II* **52**, 1287–1307.
- [4] 例えば, Pope, S.B. 2000 *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Eq.(5.171).
- [5] Yamazaki, Y., Ishihara, T. & Kaneda, Y. 2002 Effects of wavenumber truncation on high-resolution direct numerical simulation of turbulence. *J. Phys. Soc. Jpn.* **71**, 777–781.
- [6] Lekien, F. & Marsden, J. 2005 Tricubic interpolation in three dimensions. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.* **63**, 455–471.
- [7] Wang, L.-P., Wexler, A.S. & Zhou, Y. 2000 Statistical mechanical description and modelling of turbulent collision of inertial particles. *J. Fluid Mech.* **415**, 117–153.
- [8] Wang, L.-P. & Rosa, B. 2009 A spurious evolution of turbulence originated from round-off error in pseudo-spectral simulation. *Computers & Fluids* **38**, 1943–1949.
- [9] de Bruyn Kops, S. 2004 Private communication.